Elementare Umformungen

Binomische Formeln		Quadratische Ergänzung		Potenzen/Wurzeln	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$		$x^2 + px + q$ $x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q$ $(x + \frac{p}{2})^2 + (-(\frac{p}{2})^2 + q)$		$a^m * a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
				$(a^m)^n = a^{m*n}$	
Pythagoras				$a^n * b^n = (a*b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$
$a^2 + b^2 = c^2$ $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$				$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$	$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$

Differentialrechnung

Ableitung elementarer Funktionen

Potenzfunktion	$f(x) = x^r$	$f'(x) = rx^{r-1}$
Exponentialfunktion	$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) * a^x$
Logarithmische Funktion	$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(a) * x}$
Trigonometrische Funktionen	$f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = \cos(x)$ $f'(x) = -\sin(x)$

Differentiationsregeln

Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Konstantenregel	$f(x) = c * v(x)$	$f'(x) = c * v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) * v(x)$	$f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$
Quotientenregel	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{v(x)^2}$
Kettenregel	$f(x) = g(h(x))$	$f'(x) = g'(h(x)) * h'(x)$

Integralrechnung

Stammintegrale

$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$	$\int x^{-1} dx = \ln\|x\| + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1) + C$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$

Integrationsmethoden

Hier wird die Vorgehensweise beim Ausrechnen von Integralen mit Hilfe der Substitutionsmethode sowie der Partiellen Integration dargestellt. Diese Anleitung ist nicht allgemeingültig! Sie soll eher einen beispielhaften Ansatz liefern.

Substitutionsmethode

Voraussetzungen an die Funktion

1. Die Funktion sollte aus einer verschachtelten Teilfunktion und einer zweiten „einfachen“ Teilfunktion bestehen.
2. Die zweite Funktion muss im Prinzip der Ableitung der inneren Funktion entsprechen – der Exponent muss z.B. passen - wohingegen der Koeffizientenwert keine Rolle spielt.

Vorgehensweise bei der Substitutionsmethode

Anleitung	*Beispiel*
1. Funktion erst einmal abschreiben	$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx$
2. Funktion evtl. umformen, sodass der verschachtelte Teil links und der einfache Teil rechts steht und die Terme für eine Integration evtl. vereinfachen (z.B. Exponentenschreibweise statt Wurzeln)	$\int \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} x^3 dx = \int (x^4+1)^{-\frac{1}{2}} x^3 dx$
3. Substitution durchführen (z, also die innere Funktion, und z' bestimmen)	$z = x^4 + 1 \qquad z' = 4x^3$
4. z und z' in die Gleichung einsetzen	$\ldots \int z^{-\frac{1}{2}} z' dx$
5. Die Gleichung mit z und z' eventuell um einen Faktor erweitern, der die Abweichung von z' zur rechten „einfachen“ Teilfunktion korrigiert	$\frac{1}{4} \int z^{-\frac{1}{2}} z' dx$
6. z – und nur z! – integrieren	$\frac{1}{4} * 2 * z^{\frac{1}{2}}$
7. Rücksubstituierung von z zur originalen inneren Funktion durchführen	$\frac{1}{4} * 2(x^4+1)^{\frac{1}{2}}$
8. Funktion vereinfachen	$\frac{1}{2}\sqrt{x^4+1}$

Partielle Integration

Um eine Partielle Integration durchführen zu können, sollte die Funktion i.d.R. aus zwei „einfachen“ Teilfunktion bestehen (u(x) und v(x)).

Die Partielle Integration selbst basiert auf der Produktregel der Differentialrechnung und folgt folgendem Schema:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Nun gibt es drei (mir bekannte) Möglichkeiten, um einen Erfolg bei der Integration erwarten zu können:

1. Eine Teilfunktion kann durch (evtl. mehrfache) Integration oder Differentiation konstant werden, sodass sich bei der Lösung das rechte Integral als einfach lösbar erweist.
2. Das Produkt aus der Integration der einen Funktion und der Differentiation der anderen Funktion ergibt einen Term, der einfach zu integrieren ist.
3. Das in der Lösung rechts stehende Integral kann so bestimmt werden, dass es mit dem linken (Ergebnis-)integral übereinstimmt. Dadurch kann das rechte Integral auf die linke Seite gebracht werden - es verschwindet.

Über diese drei Aspekte sollte man sich unbedingt vor der eigentlichen Lösung Gedanken machen, da ansonsten die Rechnung in eine reine „Rumprobiererei“ ausartet bzw. die Lösung der Aufgabe vollständig misslingt.

Hierzu jeweils ein Beispiel:

Alternative 1 Hier wird x als u(x) gewählt, da aus dessen Differentiation ein konstanter Wert resultiert. v' kann somit unabhängig von u' integriert werden.	$\int \cos(x) x dx$ $u(x) = x \qquad v'(x) = \cos(x)$ $u'(x) = 1 \qquad v(x) = \sin(x)$ $\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int 1 * \sin(x)dx$ $\int x\cos(x)dx = x\sin(x) + \cos(x)$
Alternative 2 Hier existieren zunächst nicht einmal zwei Teilfunktionen – kein Problem, man fügt einfach eine 1 als Faktor hinzu. Nun muss selbstverständlich ln(x) differenziert und 1 integriert werden und siehe da: u' * v ergibt eine 1 – das Integral davon ist das x.	$\int \ln(x)dx$ $\int \ln(x) * 1dx$ $u(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = 1$ $u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v(x) = x$ $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x} x dx$ $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$ $\int \ln(x)dx = x(\ln(x) - 1)$
Alternative 3 Die Belegung von u(x) und v'(x) spielt hier keine Rolle, da beide identisch sind. Es ergibt sich also im rechten Integral ein cos²(x). Nun wird versucht, diesen Term so umzuformen, dass es dem linken Integral entspricht. Pythagoras hilft hier weiter, nämlich mit der Gleichung sin²(x)+cos²(x)=1. So kann das cos²(x) durch ein 1-sin²(x) ausgetauscht werden. Nun wird das rechte Integral auf die linke Seite gebraucht und schließlich die Gleichung durch 2 dividiert.	$\int \sin^2(x)dx$ $\int \sin(x) * \sin(x)dx$ $u(x) = \sin(x) \qquad v'(x) = \sin(x)$ $u'(x) = \cos(x) \qquad v(x) = -\cos(x)$ $\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)dx$ $\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \sin^2(x)dx$ $\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \int \sin^2(x)dx$ $2\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + x$ $\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$